www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANALYSE NUMÉRIQUE

Les vecteurs considérés sont dans $\mathbb{R}^n$ et écrits en colonne ; si $u \in \mathbb{R}^n$, u^t est le vecteur ligne transposé de u et uv^t est une matrice $n \times n$.

On note $(u, v) = u^t v$ le produit scalaire usuel, $|u| = \sqrt{u^t u}$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $|A| = \sup \left\{ \frac{|Au|}{|u|}, u \neq 0 \right\}$ la norme de matrice associée.

I. PRÉLIMINAIRES

1. Démontrer qu'une matrice $n \times n$ A est de rang 1 si et seulement si il existe u et v non nuls tels que $A = uv^t$.

2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $A = uv^t \quad u, v \neq 0$. Sous quelle condition A est-elle diagonalisable ?

3. I est la matrice unité $n \times n$. Montrer que dét $(I + uv^t) = 1 + v^t u$.

4. Montrer que $|uv^t| = |u||v|$ et que $|I - vv^t| = 1 \; \forall v$ tel que $|v| = 1$.

5. Expliciter l'inverse de $I + uv^t$ – quand il existe – sous la forme $I + \alpha uv^t$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. Soit A une matrice $n \times n$, inversible. Montrer que, pour toute matrice B carrée d'ordre n telle que $|B| \cdot |A^{-1}| < 1$, la matrice $A + B$ est inversible.

7. Cette question n'intervient pas dans la suite du problème.

   Soit A une matrice $n \times n$ symétrique et $u \neq 0$. On note $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\lambda'_1 \leqslant \lambda'_2 \ldots \leqslant \lambda'_n$ celles de $A + \rho uu^t$, $\rho \in \mathbb{R}$.

   La question est de montrer que $\rho \geqslant 0$ implique $\lambda'_1 \geqslant \lambda_1$ et que $\forall \rho, \lambda'_2 \geqslant \lambda_1$.

   Pour cela on peut introduire une matrice orthogonale R telle que $R^t uu^t R = \begin{bmatrix} u^t u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Alors $R^t AR = \begin{bmatrix} \alpha & a^t \\ a & A_{n-1} \end{bmatrix}$; comme A_{n-1} est symétrique, il existe une matrice $(n-1) \times (n-1)$ orthogonale S telle que $S^t A_{n-1} S = \text{diag}\{\alpha_i ; i = 2, \ldots, n\}$. On pose $Q = R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$.

   Évaluer $Q^t AQ$, $Q^t (A + \rho uu^t) Q$ et utiliser la relation suivante valable pour toute matrice symétrique B de valeurs propres $\lambda_i(B)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\lambda_k(B) = \max_{F, \dim F \leqslant k-1} \; \min_{x \in F^\perp, x \neq 0} x^t Bx / x^t x$$

   où F désigne un sous-espace vectoriel d'orthogonal $F^\perp$ dans $\mathbb{R}^n$.

8. On définit la norme de Frobénius d'une matrice $n \times n$ A par :

$$|A|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \text{tr } AA^t \qquad (\text{tr} = \text{trace}).$$

   Démontrer les résultats suivants :

a. $|AB|_F \leqslant |A|_F |B|_F$

$|uv^t|_F = |u||v|$

b. $|A| \leqslant |A|_F \leqslant \sqrt{n} |A|$.

c. $|A(I - vv^t)|_F^2 = |A|_F^2 - |Av|^2 \quad \forall v, \; |v| = 1$.

Tournez la page S.V.P.

II

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x^* \in \Omega$. On considère une fonction $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 ayant x^* pour unique zéro dans Ω. On suppose de plus la matrice $f'(x)$ inversible pour tout $x \in \Omega$.

La méthode de Newton de résolution de $f(x) = 0$ s'écrit $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$ ou encore :

$$x_{k+1} - x_k = -f'(x_k)^{-1} f(x_k).$$

On considère des méthodes du type : (1) $\quad B_k(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k)$

où les matrices B_k sont générées itérativement à partir de B_0 par une formule donnant B_{k+1} à partir de x_k, B_k, x_{k+1}. Si on a $x_{k+1} = x_k$ (1) implique $f(x_k) = 0$, donc $x_k = x^*$ si $x_k \in \Omega$. On suppose dans toute la suite $x_{k+1} \neq x_k$.

On impose aux matrices B_k de vérifier : (2) $\quad f(x_k) = f(x_{k+1}) + B_{k+1}(x_k - x_{k+1})$.

On utilise les notations $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ et pour les calculs intermédiaires on remplace s_k par s, y_k par y, B_k par B et B_{k+1} par $\overline{B}$.

1. Décrire la méthode (1)(2) pour $n = 1$.

   On suppose maintenant $n \geqslant 2$. On écrit (2) sous la forme : (3) $\quad \overline{B}s = y$.

   Afin de déterminer $\overline{B}$ on impose de plus que : (4) $\quad \overline{B}z = Bz \quad \forall z$ tel que $z's = 0$.

2. On pose $C = \overline{B} - B$. Déterminer C à partir de (3)(4). On trouve : (5) $\quad \overline{B} = B + (y - Bs)\, s'/s's$.

3. Montrer que $\overline{B}$ est l'unique solution du problème : $\min \{ |\hat{B} - B|_F ;\ \hat{B}s = y \}$

   On appelle méthode $\mathscr{B}$ la méthode (1) et : (6) $\quad B_{k+1} = B_k + (y_k - B_k s_k)\, s_k'/s_k' s_k$.

   La constructibilité de cette méthode, c'est-à-dire le fait que $x_k \in \Omega$ est examinée plus loin.

4.*a.* Soit A une matrice $n \times n$ régulière. Montrer que :

$$(A + uv')^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv' A^{-1} \quad \text{si} \quad \sigma = 1 + v' A^{-1} u \neq 0.$$

b. En déduire que (1)(6) peut s'écrire (H_0, x_0 donnés) :

(7) $\quad x_{k+1} = x_k - H_k f(x_k)$

(8) $\quad H_{k+1} =$ une expression de s_k, H_k, y_k à préciser, en supposant $s_k' H_k y_k \neq 0$.

5. Comparer les coûts de la méthode de Newton sous la forme : nombre d'évaluations de fonctions pour le calcul de $f'(x_k)$ et $f(x_k)$, nombre d'opérations élémentaires pour résoudre $f'(x_k)\, s_k = -f(x_k)$ et ceux de la récurrence (7)(8).

   On ne demande que des évaluations du type $0(n^n)$.

   On suppose jusqu'à la fin du problème qu'il existe λ tel que :

$$|f'(x') - f'(x)| \leqslant \lambda |x' - x| \quad \forall x, x' \in \Omega$$

   et que Ω est convexe.

   On pose $E_k = B_k - f'(x_k)$ et pour les calculs intermédiaires on remplace E_k par E, E_{k+1} par $\overline{E}$, x_k par x et x_{k+1} par $\bar{x}$.

6. Vérifier que : (9) $\quad \overline{E} = E(I - ss'/s's) + (y - f'(x)s)\, s'/s's - [f'(\bar{x}) - f'(x)]$.

7. Démontrer que :

$$|y - f'(x)s| \leqslant \frac{\lambda}{2} |s|^2.$$

8. Soit $|\ |_M$ une norme matricielle quelconque. Montrer qu'il existe C telle que $\forall x, \bar{x} \in \Omega$ vérifiant $|\bar{x} - x^*| \leqslant |x - x^*|$ l'on ait :

   (10) $\quad |\overline{E}|_M \leqslant |E(I - ss'/s's)|_M + C|x - x^*|$.

   En déduire que : (11) $\quad |\overline{E}| \leqslant |E| + C|x - x^*|$.

Tournez la page S.V.P.

III

Soit E une matrice $n \times n$, $x \in \Omega$.

On suppose que $f'(x) + E$ est inversible et on définit $\bar{x}$ par :

(12) $$(x) + [f'(x) + E](\bar{x} - x) = 0.$$

$o(x - x^*)$ désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tendant vers zéro quand x tend vers x^*.

$$B_\eta(x^*) = \{x ; |x - x^*| \leqslant \eta\}.$$

On suppose $\bar{x} \neq x$ et on pose $\rho = |E(\bar{x} - x)| / |\bar{x} - x|$.

1. Démontrer la relation :

(13) $$(1 - |f'(x)^{-1}|\rho)|\bar{x} - x^*| \leqslant |x - x^*| |f'(x)^{-1}| |\rho + |f'(x) - f'(x^*)| + |o(x - x^*)_1|$$

2. En déduire que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ il existe α et η tels que :

$$|\bar{x} - x^*| \leqslant \varepsilon |x - x^*| \quad \forall x \in B_\eta(x^*), \quad \forall E \text{ tel que } \rho \leqslant \alpha.$$

On utilise les définitions suivantes :

x_k converge linéairement vers x^* si et seulement si il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ tels que $|x_{k+1} - x^*| \leqslant \varepsilon |x_k - x^*|$, $\forall k \geqslant k_0$.

x_k converge superlinéairement vers x^* si et seulement si il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ et une suite $\varepsilon_k \in]0, 1[$, $\varepsilon_k \to 0$ tels que $|x_{k+1} - x^*| \leqslant \varepsilon_k |x_k - x^*|$, $\forall k \geqslant k_0$.

On considère $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé et α et η qui lui sont associés à la question 2. Soit $x_0 \in B_\eta(x^*)$ et $|E_0| \leqslant \alpha$. On se donne une suite E_k telle que $f'(x_k) + E_k$ soit inversible pour tout k. On rappelle que l'on suppose $x_{k+1} \neq x_k$ pour tout k; on pose $\rho_k = |E_k(x_{k+1} - x_k)| / |x_{k+1} - x_k|$ et on suppose $\alpha_k \leqslant \alpha \; \forall k$.

3. Démontrer que x_k est constructible et converge linéairement vers x^*.

4. On suppose de plus $\lim_{k \to \infty} \rho_k = 0$. Montrer que x_k converge superlinéairement vers x^*.

5. Montrer que si x_k converge superlinéairement vers x^* on a $\lim_{k \to \infty} \rho_k = 0$.

6. (On demande de bien détailler la démonstration de cette question.)

On considère l'itération (1) (6) avec x_0 et B_0 donnés.

Montrer qu'il existe $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\eta}$ (dépendants de ε et $f'(x^*)$) tels que $x_0 \in B_{\tilde{\eta}}(x^*)$ et $|B_0 - f'(x_0)| \leqslant \tilde{\alpha}$ impliquent que l'itération est constructible, que l'on a :

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant \varepsilon |x_k - x^*|$$

et que x_k converge linéairement vers x^* (utiliser (11)).

On dit que φ est une F-fonction si $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et pour toute suite de réels ρ_k telle que $\lim_{k \to \infty} \varphi(\rho_k) = 0$ on a $\lim_{k \to \infty} \rho_k = 0$.

7. Déduire de (10), en prenant pour $|\ |_M$ la norme de Frobénius, que s'il existe $\bar{e}$ tel que $|E|_F \leqslant \bar{e}$ $\forall E$ alors il existe une F-fonction φ telle que :

(14) $$|\bar{E}|_F \leqslant [1 - \varphi(\rho)] \; |E|_F + C \; |x - x^*|$$

$\forall x, \bar{x} \in \Omega$ et vérifiant $|\bar{x} - x^*| \leqslant |x - x^*|$.

8. Montrer que la série des $\varphi(\rho_k) |E_k|_F$ est convergente et en déduire la convergence superlinéaire de x_k vers x^*.

- FIN -

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

L'objet du problème est l'étude des propriétés des systèmes non holonomes de Chaplygin dans le but d'étudier le comportement d'une toupie appelée « Toupie magique ».

Dans les parties I et II, on établit la méthode de réduction des équations du mouvement pour les systèmes de Chaplygin.

Dans la partie III, une application simple est proposée.

Les parties IV et V sont consacrées au cas de la Toupie magique.

PARTIE I

Soit un système matériel (Σ), en mouvement par rapport à un repère absolu, dont la position par rapport à ce repère dépend de $n + k$ paramètres $(q_1, \ldots, q_{n+k})$. Ces paramètres sont des fonctions du temps supposées deux fois continûment différentiables. On note $\dot{q}_r$ la dérivée première de q_r par rapport à t. Le système (Σ) est soumis à des forces données dérivant d'une fonction de forces $U(q_1, \ldots, q_{n+k}, t)$.

On suppose que les paramètres $(q_1, \ldots, q_{n+k})$ sont liés par k relations non holonomes :

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n+k} a_{pj}\,\dot{q}_j + a_p = 0 \qquad (p = 1, \ldots, k)$$

où les quantités a_{pj} et a_p sont des fonctions continûment différentiables des paramètres $(q_1, \ldots, q_{n+k}, t)$.

1. Montrer que les équations du mouvement de (Σ) s'écrivent :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T + U) = \sum_{p=1}^{k} \lambda_p a_{pj} \qquad (j = 1, \ldots, n + k)$$

où $T(\dot{q}_j, q_j, t)$ désigne l'énergie cinétique de (Σ) et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sont les multiplicateurs de Lagrange.

2. Montrer que si l'énergie cinétique et la fonction de forces ne dépendent pas explicitement du temps et si les contraintes non holonomes sont homogènes $(a_p = 0; p = 1, \ldots, k)$, le système des équations du mouvement admet l'intégrale première :

$$T_2 - T_0 - U = h,$$

où h est une constante, T_2 est la partie quadratique par rapport aux vitesses $\dot{q}_j$ de l'énergie cinétique, T_0 la partie indépendante des vitesses.

PARTIE II

On suppose maintenant que le système (Σ) est un système non holonome de Chaplygin, c'est-à-dire que les k relations non holonomes (1) sont homogènes et peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(3) \qquad \dot{q}_\mu = \sum_{r=1}^{n} b_{\mu r}\,\dot{q}_r \qquad (\mu = n + 1, \ldots, n + k)$$

dans lequel les fonctions $b_{\mu r}$ ne dépendent que des n premiers paramètres $(q_1, \ldots, q_n)$ et du temps ; de plus :

$$(4) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_\mu} - \frac{\partial U}{\partial q_\mu} = 0 \qquad (\mu = n + 1, \ldots, n + k)$$

1. Montrer que les équations du mouvement de (Σ) s'écrivent :

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_r}(T + U) = \displaystyle\sum_{\mu=n+1}^{n+k} \chi_\mu\, b_{\mu r} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu}\right) = -\chi_\mu \\ (r = 1, \ldots, n; \quad \mu = n + 1, \ldots, n + k) \end{cases}$$

où $(\chi_{n+1}, \ldots, \chi_{n+k})$ sont k multiplicateurs de Lagrange.

Tournez la page S.V.P.

2. On suppose que l'énergie cinétique T, la fonction de forces U et les fonctions $b_{\mu r}$ sont indépendantes du temps.

On introduit les quantités suivantes :

$$\begin{cases} T^*(\dot q_r, q_r) = T(\dot q_r, \sum_{s=1}^{n} b_{\mu s}\dot q_s, q_r) \\ \Theta_\mu(\dot q_r, q_r) = \left[\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_\mu}(\dot q_r, \dot q_\lambda, q_r)\right]_{\dot q_\lambda = \sum_{s=1}^{n} b_{\lambda s}\dot q_s} \\ (r = 1, \dots, n; \quad \mu, \lambda = n+1, \dots, n+k) \end{cases}$$

Déduire des équations (5) le système réduit :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T^*}{\partial \dot q_r}\right) - \dfrac{\partial}{\partial q_r}(T^* + U) = Q_r \\ Q_r = \sum_{\mu=n+1}^{n+k}\sum_{s=1}^{n} \Theta_\mu \nu_{\mu rs}\dot q_s \\ \nu_{\mu rs} = \dfrac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_s} - \dfrac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_r} \\ (r = 1, \dots, n) \end{cases}$$

3. On suppose que les liaisons sont indépendantes du temps. L'énergie cinétique $T(\dot q_r, \dot q_\mu, q_r)$ $(r = 1, \dots, n;$ $\mu = n+1, \dots, n+k)$ est une forme quadratique définie positive des vitesses $(\dot q_r, \dot q_\mu)$ que l'on peut mettre sous la forme :

$$(7) \qquad T = \frac{1}{2}\left(\sum_{\lambda,\mu=n+1}^{n+k} A_{\lambda\mu}\dot q_\lambda \dot q_\mu + 2\sum_{\mu=n+1}^{n+k}\sum_{r=1}^{n} A_{\mu r}\dot q_\mu \dot q_r + \sum_{r,s=1}^{n} A_{rs}\dot q_r \dot q_s\right)$$

où les fonctions $A_{\lambda\mu}$, $A_{\mu r}$ et A_{rs} dépendent de $(q_1, \dots, q_n)$ et $A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}$; $A_{rs} = A_{sr}$.

a. Montrer que les seconds membres Q_r sont des formes quadratiques par rapport à $(\dot q_1, \dots, \dot q_n)$:

$$Q_r = \sum_{\mu=n+1}^{n+k}\sum_{p,s=1}^{n} \theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}\dot q_s \dot q_p \qquad (r = 1, \dots, n).$$

Expliciter les fonctions $\theta_{\mu p}$ en fonction des coefficients de la forme quadratique (7).

b. Montrer que le système (6) admet l'intégrale première

$$T^* - U = h$$

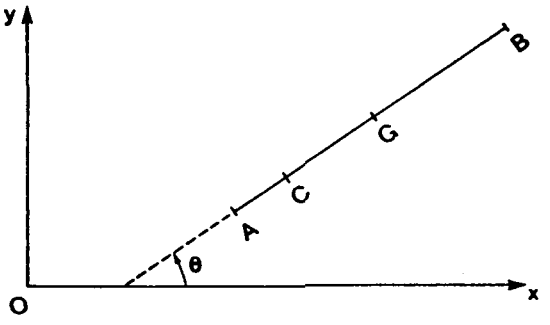
dans laquelle on montrera que T^* est une forme quadratique définie positive des vitesses :

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}\dot q_r \dot q_s$$

Expliciter les fonctions a_{rs}.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE III



Dans cette partie, le système (Σ) est un patin représenté par une barre rectiligne infiniment mince AB qui glisse sans frottement sur un plan rapporté à deux axes orthonormés absolus $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. On désigne par θ l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB})$ et par x et y les coordonnées d'un point C appartenant à AB. G étant le centre d'inertie de AB, on pose $\overrightarrow{CG} = b\,\vec{W}$, où b est une constante et $\vec{W}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{AB}$. J est le moment d'inertie de AB par rapport à C.

Une liaison impose au vecteur vitesse de C d'être parallèle à $\overrightarrow{AB}$; cette liaison est supposée parfaite et la barre n'est soumise à aucune autre force. On pose $q_1 = x$, $q_2 = \theta$, $q_3 = y$.

1. Montrer que l'on a un système non holonome de Chaplygin dont on peut écrire les équations sous la forme réduite :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2).$$

Expliciter T^*, Q_1 et Q_2.

2. Montrer que le problème se réduit à des quadratures.
(On pourra montrer l'existence d'une intégrale première supplémentaire.)

PARTIE IV

Dans cette partie, le système (Σ) est le système non holonome de Chaplygin envisagé dans la deuxième partie, les hypothèses faites en II.2. et II.3. étant en outre remplies.

On suppose de plus que, p étant un entier strictement inférieur à n :

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial Q_r}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = p+1, \ldots, n\,;\quad r = 1, \ldots, n).$$

Il en résulte que les variables $(q_{p+1}, \ldots, q_n)$ n'interviennent pas explicitement dans les équations (6) : ces variables sont des paramètres ignorables.

1. Montrer que le système réduit (6) admet une famille particulière de solutions (mouvements stationnaires) définie par :

$$\begin{cases} q_i = q_i^0, \quad q_\alpha = \omega_\alpha t + q_\alpha^0 & (\alpha = p+1, \ldots, n) \\ \dot{q}_i = 0, \quad \dot{q}_\alpha = \omega_\alpha & (i = 1, \ldots, p) \end{cases}$$

où les n constantes (q_i^0, ω_α) satisfont les équations :

$$(8) \qquad \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{\alpha,\beta=p+1}^{n} \omega_\alpha \omega_\beta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=n+1}^{n+k} \theta_{\mu\beta} \nu_{\mu i\alpha} \right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

et les conditions de compatibilité :

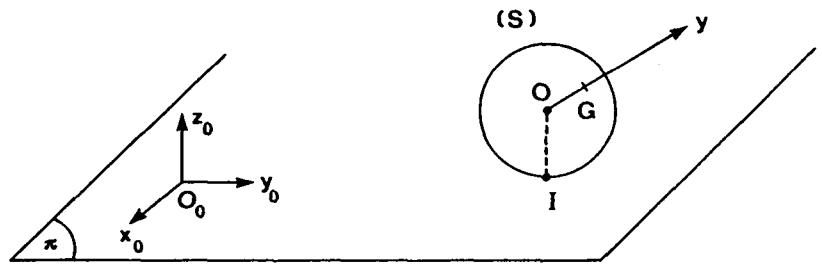
$$(\mathscr{C}) \qquad \sum_{\mu=n+1}^{n+k} \theta_{\mu\beta} \nu_{\mu\alpha\gamma} = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n)$$

et où les $(n-p)$ constantes q_α^0 sont arbitraires.

Que deviennent les conditions $(\mathscr{C})$ lorsqu'il n'y a qu'un paramètre ignorable ?

Tournez la page S.V.P.

2. *Application.*



On considère une toupie (S), *pesante, non homogène,* ayant la forme d'une sphère de rayon a, de masse m, qui roule sans glisser sur un plan horizontal fixe (π). Tous les trièdres introduits par la suite sont orthonormés, directs.

Soit G le centre d'inertie de (S), $(\overrightarrow{Gx}, \overrightarrow{Gy}, \overrightarrow{Gz})$ ses axes principaux d'inertie en G et (A, B, C) ses moments d'inertie principaux. Le centre O de (S) appartient à l'axe $\overrightarrow{Gy}$ et on pose $\overrightarrow{OG} = l\vec{y}$ (l constante positive, $\vec{y}$ vecteur unitaire). Soit $(O_0; \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe tel que les axes $\overrightarrow{O_0 x_0}$ et $\overrightarrow{O_0 y_0}$ soient dans le plan fixe (π). I désigne le point de contact de (S) et de (π). Soient (x_0, y_0) les coordonnées de G par rapport aux axes $\overrightarrow{O_0 x_0}, \overrightarrow{O_0 y_0}$. On note $(G; \vec{x}'_0, \vec{y}'_0, \vec{z}'_0)$ un trièdre d'origine G, d'axes parallèles au repère fixe et $(G; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ le trièdre ainsi défini : $\overrightarrow{Gx_1}$ est un axe perpendiculaire à la fois à $\overrightarrow{Gz}$ et $\overrightarrow{Gz'_0}$. ψ désigne l'angle $(\overrightarrow{Gx'_0}, \overrightarrow{Gx_1})$ compté positivement autour de $\overrightarrow{Gz'_0}$ et θ l'angle $(\overrightarrow{Gz'_0}, \overrightarrow{Gz})$ compté positivement autour de $\overrightarrow{Gx_1}$; enfin φ désigne l'angle $(\overrightarrow{Gx_1}, \overrightarrow{Gx})$ compté positivement autour de $\overrightarrow{Gz}$. (ψ, θ, φ) sont les angles d'Euler. $\vec{g}$ est l'accélération, supposée constante, de la pesanteur $(\vec{g} = -g\vec{z}_0)$.

a. Montrer que les conditions de roulement sans glissement en I s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \alpha_1 \dot\theta + \alpha_2 \dot\varphi + \alpha_3 \dot\psi \\ \dot{y}_0 = \beta_1 \dot\theta + \beta_2 \dot\varphi + \beta_3 \dot\psi \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_i = \mathscr{A}_i \cos\psi + \mathscr{B}_i \sin\psi \\ \beta_i = \mathscr{A}_i \sin\psi - \mathscr{B}_i \cos\psi \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où les fonctions $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{B}_i$ ne dépendent que de θ et φ.

b. Déterminer l'énergie cinétique T et la fonction de forces U dont dérivent les forces de pesanteur en fonction des paramètres.

c. On pose $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$, $q_4 = x_0$, $q_5 = y_0$. Montrer que le système est un système non holonome de Chaplygin dont on peut écrire les équations du mouvement sous la forme réduite :

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial (T^* + U)}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, 3).$$

d. Montrer que T^* s'écrit : $$T^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{3} a_{rs} \dot q_r \dot q_s \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

où les fonctions a_{rs} ne dépendent que de θ et de φ. Calculer a_{33} (on ne cherchera pas à expliciter les autres fonctions a_{rs}).

e. Montrer que :

$$\begin{cases} \nu_{412} = a\cos\psi\cos\theta \\ \nu_{413} = a\cos\psi \\ \nu_{423} = a\sin\theta\sin\psi \\ \nu_{5rs} = -\dfrac{\partial}{\partial\psi}(\nu_{4rs}) \qquad (r, s = 1, 2, 3). \end{cases}$$

En déduire que les quantités Q_1, Q_2, Q_3 sont indépendantes de ψ.

Expliciter ces quantités.

f. Montrer, en utilisant les résultats de IV.1., que le système réduit (9) admet les deux solutions particulières suivantes :

$$(E_0)\ \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \dot\psi = \omega$$

$$(E_1)\ \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0, \quad \dot\psi = \omega$$

où ω est une constante arbitraire.

A quels mouvements particuliers de la toupie correspondent ces solutions ?

Tournez la page S.V.P.

PARTIE V

Dans cette partie, on étudie la stabilité des mouvements (E_0) et (E_1) de la toupie (S).

1. Étude de la stabilité de (E_0) : on introduit les paramètres :

$$u = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad v = \varphi, \quad \dot{x} = \dot{\psi} - \omega$$

On suppose que u, v, $\dot{x}$ sont des termes de perturbation petits et de même ordre de grandeur.

a. Déterminer l'énergie cinétique simplifiée T_s^* et la fonction de forces simplifiée U_s obtenues à partir de T^* et U en négligeant dans ces fonctions les termes d'ordres strictement supérieurs à 2 par rapport à u, v, $\dot{x}$ et leurs dérivées par rapport au temps.

b. Montrer que le système des équations linéarisées au voisinage de (E_0) s'écrit :

$$(10) \qquad \begin{cases} \overline{A}\,\ddot{u} + \omega F \dot{v} + K_1 u = 0 \\ \overline{C}\,\ddot{v} - \omega F \dot{u} + K_2 v = 0 \\ B\,\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \overline{A} = A + m(a+l)^2 \\ \overline{B} = B + ma(a+l) \\ \overline{C} = C + m(a+l)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = \omega^2(\overline{A} - F) - mgl \\ K_2 = \omega^2(\overline{C} - F) - mgl \\ F = \overline{A} + \overline{C} - \overline{B} \end{cases}$$

c. En déduire des conditions nécessaires de stabilité de (E_0) puis, sans calculs supplémentaires, des conditions nécessaires de stabilité de (E_1).

2. On envisage maintenant le cas des rotations rapides.

a. Écrire le système obtenu à partir du système (10) en faisant le changement de variable $\tau = \omega t$.

b. En supposant que les deux quantités :

$$\varepsilon_1 = \frac{mgl}{\overline{A}\omega^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{mgl}{\overline{C}\omega^2}$$

sont négligeables, donner des conditions nécessaires de stabilité de (E_0) puis, sans nouveaux calculs, des conditions nécessaires de stabilité de (E_1).

c. Donner les conditions que doivent remplir les moments d'inertie principaux de (S) pour que (E_1) soit instable et que (E_0) soit stable (au sens de l'approximation linéaire).

-FIN-

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

L'objet du problème est l'étude d'un algorithme stochastique de minimisation d'une fonction H sur un ensemble E^S où S est de cardinal fini n (En pratique n est très grand, par exemple en traitement d'images $n \simeq 10^6$). Cet algorithme dépend d'une suite de paramètres réels positifs (T_k).

Dans la première partie $E = \mathbb{R}$ et H est une forme quadratique définie positive ; elle est donc convexe et a un minimum unique. Les vecteurs aléatoires qui interviennent dans l'algorithme sont Gaussiens. L'algorithme converge pourvu que la suite (T_k) tende vers 0.

Dans la seconde partie E est fini et H quelconque. L'algorithme converge pourvu que la suite (T_k) tende vers 0 en décroissant et en restant minorée par une suite $(\frac{\gamma}{\ln k})$.

Mise à part cette problématique commune, les deux parties sont indépendantes et peuvent être abordées dans l'ordre qui conviendra le mieux à chaque candidat. Celui-ci pourra admettre le résultat de certaines questions pour traiter les suivantes à condition de l'indiquer clairement.

PREMIERE PARTIE

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cette partie sont définies sur un même espace probabilisé. On note $\mathcal{F}$ la tribu des parties probabilisables et E l'espérance mathématique, ou moyenne, ou intégrale par rapport à la probabilité.

Q.1. Soit $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $\{e_s\}_{s \in S}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; on note de la même lettre une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et la matrice (n,n) qui la représente sur cette base, un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne $(n,1)$ qui le représente ; I_n désigne l'application identique de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même et ${}^tA$ la matrice transposée de la matrice A.

Un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et suivant une loi de Laplace-Gauss sera dit *Gaussien*. Il sera dit Gaussien *strict* si sa matrice des variances-covariances est régulière (pour abréger, on appellera celle-ci *covariance* et on la notera cov).

Soit $X = \sum_{s \in S} X_s e_s$ un vecteur Gaussien strict de $\mathbb{R}^n$ de moyenne $E(X) = m = \sum_{s \in S} m_s e_s$ et de covariance $\mathrm{cov}(X) = E((X-m)\,{}^t(X-m)) = \Gamma$.

On note γ l'inverse de Γ, γ_{sk} les éléments de γ, f la densité de X par rapport à la mesure de Lebesgue de support $\mathbb{R}^n$.

Pour tout s de S, on note P_s l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à x associe $x_s e_s$: $P_s x = x_s e_s$; et on pose :

$$x_{(s)} = (I_n - P_s)\, x\,,$$
$$X_{(s)} = (I_n - P_s)\, X\,.$$

1.1. Déterminer la loi de $X_{(s)}$; on précisera : sa moyenne,
sa covariance,
sa fonction caractéristique,

et sa densité notée g_s par rapport à la mesure de Lebesgue ayant pour support $(I_n - P_s)\,\mathbb{R}^n$.

1.2. Montrer que l'on a, pour tout x de $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = g_s(x_{(s)})\, h_s(x)$$

avec $h_s(x) = \sqrt{\frac{\gamma_{ss}}{2\pi}}\, \exp\left(-\frac{1}{2}\, {}^t(x-m)\,\gamma\, Q_s\, \gamma\,(x-m)\right)$ où $Q_s = \frac{1}{\gamma_{ss}}\, P_s$.

1.3. On dit qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}^n$) dans $\mathbb{C}$ est à *croissance lente* s'il existe un k de $\mathbb{N}$ tel que

$\lambda \mapsto \frac{|\varphi(\lambda)|}{(1+|\lambda|)^k}$ soit bornée sur $\mathbb{R}$

(respectivement $\lambda \mapsto \frac{|\varphi(\lambda)|}{(1+||\lambda||)^k}$ bornée sur $\mathbb{R}^n$).

Tournez la page S.V.P.

A toute fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ mesurable et à croissance lente, on associe la fonction Ψ_s de $(I_n - P_s)\ \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Psi_s(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda)\, h_s(\lambda e_s + \alpha)\, d\lambda .$$

On note $\mathcal{F}_{(s)}$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurable $X_{(s)}$. Montrer que l'espérance conditionnelle de $\varphi(X_s)$ par rapport à cette tribu : $E(\varphi(X_s) \mid \mathcal{F}_{(s)})$ est définie et que $\Psi_s(X_{(s)})$ est un représentant de $E(\varphi(X_s) \mid \mathcal{F}_{(s)})$.

Q.2.

2.1. Pour α fixé dans $(I_n - P_s)\ \mathbb{R}^n$, montrer que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\lambda \longrightarrow h_s(\lambda e_s + \alpha)$$

est une densité de probabilité Gaussienne par rapport à la mesure de Lebesgue de support $\mathbb{R}$.

Soit $Z_s(\alpha)$ une variable aléatoire réelle ayant cette densité.

2.2. Montrer que $E(Z_s(\alpha)\, e_s) = Q_s\, \gamma\, (m-\alpha)$.

2.3. Montrer que $\operatorname{cov}(Z_s(\alpha)\, e_s) = Q_s$.

2.4. Déterminer la fonction caractéristique de $Z_s(\alpha)$.

Q.3. Pour tout k entier strictement positif, on note s_k l'élément de S tel que : $s_k \equiv k \pmod{n}$.

On considère une suite $(Y^k)_{k\geq 1}$ de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathcal{F}^k$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ rendant mesurables $Y^1, Y^2, \ldots, Y^k$.

On pose $\alpha^k = (I_n - P_{s_k})\, Y^k$.

On suppose que

i) Y^1 est Gaussien de moyenne $m + \mu^1$, de covariance Λ^1 ;

ii) pour toute application φ mesurable et à croissance lente de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda e_{s_k} + \alpha^k)\, h_{s_k}(\lambda e_{s_k} + \alpha^k)\, d\lambda$$

est un représentant de $E(\varphi(Y^{k+1}) / \mathcal{F}^k)$.

3.1. u étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$, exprimer $E(\exp(i\, {}^t u\, Y^{k+1}) / \mathcal{F}^k)$ en fonction de Y^k.

3.2. En déduire que, pour tout k, Y^k est un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Calculer $\mu^k = E(Y^k - m)$ et $E((Y^k - m)\, {}^t(Y^k - m))$.

3.3. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}^n$:

$$||x||_\gamma = \sqrt{{}^t x\, \gamma x} .$$

Montrer que $||\mu^k||_\gamma$ est une fonction décroissante de k.

3.4. Montrer que le produit :

$(I_n - Q_n \gamma) \ldots (I_n - Q_1 \gamma)$ est une application linéaire strictement contractante pour $||\ ||_\gamma$.

En déduire que $\lim_{k\to\infty} E(Y^k) = m$, puis que la suite $(Y^k)_{k\geq 1}$ converge en loi vers X.

3.5. Quelle est la loi de Y^k dans le cas particulier :

$$\mu^1 = 0\ ,\ \Lambda^1 = \Gamma\ ?$$

Q.4. On se donne une suite $(T_k)_{k\geq 1}$ de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{k\,\infty} T_k = 0 .$$

On reprend l'algorithme de la question 3 en y remplaçant la fonction h_{s_k} par la fonction :

$$x \longrightarrow h_k^1(x) = \sqrt{\frac{\gamma_{s_k s_k}}{\pi\, T_k}}\ \exp\left(-\frac{1}{T_k}\ {}^t(x-m)\ \gamma\ Q_{s_k}\ \gamma\ (x-m)\right)$$

Tournez la page S.V.P.

et on suppose maintenant que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda e_{s_k} + \alpha^k)\, h_k^1(\lambda e_{s_k} + \alpha^k)\, d\lambda$$

est un représentant de $E\left(\varphi(Y^{k+1}) / \mathcal{F}_k\right)$.

Montrer que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ converge en probabilité vers m .

DEUXIEME PARTIE

Dans cette partie, Ω est un ensemble fini et toutes les probabilités sont définies sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Etant données deux probabilités μ et ν , on pose

$$||\mu - \nu|| = \operatorname*{Max}_{A \subset \Omega} |\mu(A) - \nu(A)| \ ;$$

on rappelle que

$$||\mu - \nu|| = \sum_{\omega \in \Omega} (\mu(\{\omega\}) - \nu(\{\omega\}))^+$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\omega \in \Omega} |\mu(\{\omega\}) - \nu(\{\omega\})|$$

où $x^+ = \operatorname{Max}(x,0)$.

Q.5. On appelle *transition* sur Ω une fonction P de $\Omega \times \mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que, pour tout ω de Ω , la fonction $A \to P(\omega, A)$ soit une probabilité ; on note P_ω cette probabilité.

On pose alors $\Delta(P) = \operatorname*{Max}_{\omega,\omega'} ||P_\omega - P_{\omega'}||$.

Etant données une probabilité μ et une transition P , on note μP la probabilité définie par

$$\mu P = \sum_{\omega} \mu(\{\omega\})\, P_\omega$$

et on dit que μ est *invariante par* P si $\mu P = \mu$.

Etant données deux transitions P et Q , on note PQ la transition définie par :

$$PQ(\omega, A) = \sum_{\omega' \in \Omega} P(\omega, \{\omega'\})\, Q(\omega', A).$$

5.1. Montrer que, pour toute transition P, il existe une fonction non identiquement nulle, α , de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout ω de Ω :

$$\alpha(\omega) = \sum_{\omega' \in \Omega} \alpha(\omega')\, P(\omega', \{\omega\}) .$$

Montrer que $|\alpha|$ satisfait la même équation et en déduire qu'il existe une probabilité μ invariante par P .

5.2. Montrer que quelles que soient les deux probabilités μ et ν et les deux transitions P et Q , on a :

$$||\mu P - \nu P|| \leqslant ||\mu - \nu||\, \Delta(P)$$

et $\Delta(PQ) \leqslant \Delta(P)\, \Delta(Q)$.

5.3. Montrer que :

$$\Delta(P) = 1 - \min_{\omega,\omega'} \sum_{\omega''} \min(P(\omega, \{\omega''\}), P(\omega', \{\omega''\})).$$

Q.6. On considère une suite $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de transitions sur Ω et on définit la suite $(P^{k,\ell})_{\ell \geqslant k+1}$ par :

$$P^{k,k+1} = P^{k+1} \quad \text{et , pour } \ell \geqslant k+2 ,$$

$$P^{k,\ell} = P^{k,\ell-1}\, P^{\ell} .$$

On dit que la suite $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est *faiblement ergodique* si, pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$\lim_{\ell \to \infty} \Delta(P^{k,\ell}) = 0 .$$

On dit que la suite $(P^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est *fortement ergodique* s'il existe une probabilité ν , telle que, pour toute probabilité μ et pour tout k dans $\mathbb{N}$, on ait :

$$\lim_{\ell \to \infty} ||\mu P^{k,\ell} - \nu|| = 0 .$$

6.1. Montrer que $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est faiblement ergodique si et seulement si, quelles que soient les deux probabilités μ et ν et l'entier k, on a

$$\lim_{\ell \infty} \; ||\mu P^{k,\ell} - \nu P^{k,\ell}|| = 0 .$$

6.2. Soit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, ν_k une probabilité invariante par P^k. Montrer que, si $\sum_k ||\nu_{k+1} - \nu_k||$ converge, et si $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est faiblement ergodique, alors $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est fortement ergodique.

Q.7. Dans cette question, Ω est l'ensemble des applications d'un ensemble S de cardinal fini n dans un ensemble fini E : $\Omega = E^S$; on note $(\omega_s)_{s \in S}$ un élément de Ω.

A toute fonction H de Ω dans $\mathbb{R}$, et à tout réel strictement positif T, on associe la probabilité $\mu_{H,T}$ définie par

$$\mu_{H,T}(\{\omega\}) = C_{H,T} \exp\left(-\frac{H(\omega)}{T}\right)$$

avec $$C_{H,T} = \frac{1}{\sum_{\omega \in \Omega} \exp\left(-\frac{H(\omega)}{T}\right)} .$$

Pour chaque s de S, on associe à tout ω de Ω sa restriction $\omega_{(s)}$ à $S \setminus \{s\}$ (complémentaire de $\{s\}$ dans S) :

$$\omega_{(s)} = (\omega_j)_{j \in S \setminus \{s\}} ,$$

et la fonction H_s définie sur $E \times E^{S \setminus \{s\}}$ par :

$$H_s(\omega_s, \omega_{(s)}) = H(\omega).$$

On associe à H_s la transition π_s^T sur Ω définie par :

$$\pi_s^T(\omega, \{\omega'\}) = \begin{cases} C_{s,T} \exp\left(-\frac{H_s(\omega'_s, \omega_{(s)})}{T}\right) & \text{si } \omega_{(s)} = \omega'_{(s)} \\ 0 & \text{si } \omega_{(s)} \neq \omega'_{(s)} \end{cases}$$

où $C_{s,T}$ ne dépend pas de ω'_s.

Pour une énumération $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ de S, on pose

$$P^T = \pi^T_{s_1} \pi^T_{s_2} \ldots \pi^T_{s_n}$$

7.1. Montrer que $\mu_{H,T}$ est invariante par P^T.

7.2. On note Ω_o le sous-ensemble de Ω sur lequel H est minimum : ω_o appartient à Ω_o si et seulement si $H(\omega_o) = \min_{\omega \in \Omega} H(\omega)$.

Soit μ_o la probabilité uniforme sur Ω_o ; montrer que :

$$\lim_{T \to 0} \; ||\mu_{H,T} - \mu_o|| = 0 .$$

7.3. Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$, ne dépendant que de H, tel que $\Delta(P^T) \leqslant 1 - \exp\left(-\frac{n\delta}{T}\right)$.

7.4. En déduire l'existence d'un nombre $\gamma > 0$ tel que, pour toute suite décroissante $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels > 0 satisfaisant $\lim_{k \infty} T_k = 0$ et, pour tout $k \geqslant 2$, $T_k \geqslant \frac{\gamma}{\ell n\, k}$, la suite $(P^{T_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est fortement ergodique.

- FIN -

MATHEMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le problème traite des types de données tels qu'ils ont été vus par D. Scott. La première partie rappelle quelques résultats sur les ensembles ordonnés en général. On restreint l'étude (pour des raisons de calculabilité) à des domaines dits à base dénombrable dans la seconde partie. Dans la troisième, on prouve que tout domaine à base dénombrable peut se plonger dans un domaine particulier très simple : l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels. La quatrième partie est donc consacrée à l'étude de ce domaine. Les types de données sont caractérisés comme images de fermetures. On prouve que cette caractérisation est stable par produit et exponentiation. Enfin, on montre que l'ensemble de ces types de données est lui-même un type de données : l'image d'une fermeture.

Rappels et notations : Dans toute la suite, ω désigne l'ensemble ordonné des entiers naturels. Pour tout ensemble X, on désigne par $\mathbf{P}X$ l'ensemble des parties de X. Dans un ensemble D ordonné, on désigne par $]\leftarrow, x]$ le sous-ensemble $\{y \in D;\ y \leq x\}$ des éléments de D inférieurs ou égaux à x. Pour toute partie A d'un ensemble ordonné, on désigne par $\bigvee A$ la borne supérieure de A, c'est-à-dire le plus petit des majorants de A, quand elle existe. On dit qu'un ensemble D ordonné est *complet* quand toute suite croissante $(x_n)_{n\in\omega}$ a une borne supérieure dans D, notée $\bigvee\{x_n; n \in \omega\}$ ou simplement $\bigvee x_n$. *Sauf mention contraire, tous les ensembles considérés dans le problème seront complets.* Une partie qui contient les bornes supérieures de ses suites croissantes est dite *fermée*. On rappelle qu'une fonction $f : D \to E$ est croissante quand $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; et f est dite *continue* quand elle commute aux bornes supérieures des suites croissantes : $f(\bigvee x_n) = \bigvee f(x_n)$. L'ensemble des fonctions continues de D dans E sera noté $D \to E$.

PREMIERE PARTIE

1) Montrez que les ensembles suivants sont ordonnés complets :

a) tout ensemble ordonné fini.

b) l'ensemble $\mathbf{P}X$ des parties d'un ensemble X quelconque, pour l'ordre d'inclusion des parties.

2) Etant donnés deux ensembles D et E (ordonnés complets), montrez que les ensembles suivants sont aussi ordonnés complets :

a) le produit $D \times E$ pour l'ordre produit : $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$,

b) l'intersection $A \cap B$ de deux parties fermées de D, pour l'ordre induit,

c) la réunion $A \cup B$ de deux parties fermées de D, pour l'ordre induit.

3) *a*) Montrez que si $(x_{p,q})$ est une suite double, croissante en p et q, dans un ensemble D ordonné complet, alors le lemme de commutation suivant est vrai :

$$\bigvee_{p\in\omega}\bigvee_{q\in\omega} x_{p,q} = \bigvee_{q\in\omega}\bigvee_{p\in\omega} x_{p,q}$$

b) Déduisez-en que l'ensemble $D \to E$ des applications continues de D dans E est complet quand l'ordre $f \leq g$ sur les fonctions est défini point par point : $(\forall x)\ f(x) \leq g(x)$.

4) On dit que deux parties A et B de D sont *cofinales* quand tout élément de l'une est majoré par un élément de l'autre, et réciproquement.

a) Montrez que deux parties cofinales de D ont mêmes majorants.

b) On dit qu'une partie A de D est *filtrante à droite* ou *dirigée* lorsque deux éléments quelconques de A sont majorés dans A : $x \in A \wedge y \in A \Rightarrow \exists z \in A\ (x \leq z \wedge y \leq z)$. Montrez que si une partie A est dénombrable, non vide et dirigée, on peut définir une suite croissante dans A qui est cofinale avec A.

c) Que peut-on dire d'un ensemble ordonné E dont toute partie dénombrable, non vide et dirigée admet une borne supérieure dans E ?

5) Soit f une fonction d'un ensemble ordonné complet dans lui-même. Montrer que f est continue si, et seulement si, $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$ pour toute partie X dirigée, dénombrable et non vide.

6) *a*) Soit f une fonction continue de D dans D supérieure ou égale à l'identité : $(\forall x)\ f(x) \geq x$. Montrez que pour tout point d de D, la fonction f admet un plus petit point fixe au moins égal à d, qu'on notera $Y(f, d)$.

b) Montrez que l'ensemble E des fonctions de D dans D qui sont continues et supérieures ou égales à l'identité est une partie fermée de $D \to D$, et que Y est une fonction continue de $E \times D$ dans D.

Tournez la page S.V.P.

On dit qu'un élément e de D est *isolé* lorsqu'il vérifie la condition suivante, pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\omega}$:

$$\bigvee x_n \geq e \Rightarrow (\exists n)\, x_n \geq e$$

On suppose désormais que l'ensemble B des éléments isolés de D est dénombrable, et que D contient un plus petit élément noté $\perp$.

SECONDE PARTIE

7) Montrez que la conjonction des assertions suivantes :

(*i*) $\forall x \in D$, la partie $]\leftarrow, x] \cap B$ est dirigée.

(*ii*) $\forall x \in D,\ x = \bigvee (]\leftarrow, x] \cap B)$.

est équivalente à la conjonction des suivantes :

(*iii*) $(\forall e \in B)(\forall e' \in B)[(\exists x \in D)\, e \leq x \wedge e' \leq x) \Rightarrow (\exists e'' \in B)\, e \leq e'' \wedge e' \leq e'']$

(*iv*) Tout point x de D est borne supérieure d'une suite croissante (e_n) de points de B : $x = \bigvee e_n$.

Si D vérifie ces conditions, on dit qu'il est *algébrique*, et l'ensemble B s'appelle alors la *base* de D.

8) Montrez qu'une fonction f de D dans E, où D et E sont algébriques, est continue si et seulement si pour tout point x de D et tout point isolé e de E elle vérifie

$$e \leq f(x) \Leftrightarrow (\exists d \in B)\, d \leq x \wedge e \leq f(d)$$

9) Montrez que si D et E sont complets algébriques et disjoints, alors la réunion D+E à laquelle on ajoute un plus petit élément, et le produit cartésien D×E sont algébriques.

10) *a*) Montrez qu'étant donnés deux ensembles algébriques D et E et deux éléments isolés d dans D et e dans E, la fonction

$$f_{d,e}(x) = \begin{cases} e & \text{si } x \geq d, \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue et isolée dans D→E.

b) Montrez que la borne supérieure de deux éléments isolés de E, quand elle existe, est isolée.

On suppose que dans l'ensemble algébrique E, deux éléments isolés quelconques admettent une borne supérieure dès qu'il ont un majorant commun dans E. Montrez que si E vérifie cette condition, et si D est algébrique, alors D→E est algébrique.

TROISIEME PARTIE

11) Montrez que la fonction $c : \omega^2 \to \omega$ définie par

$$c(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + y$$

est une bijection vérifiant $x \leq c(x, y)$ et $y \leq c(x, y)$.

12) Quels sont les éléments isolés de $\mathbf{P}\omega$? En vous inspirant de l'écriture binaire de n, exhibez une énumération $(e_n)_{n\in\omega}$ de ces éléments isolés vérifiant $k \in e_n \Rightarrow k < n$.

Montrez que $\mathbf{P}\omega$ est algébrique.

13) Etant donnée l'énumération (e_p) de l'ensemble des parties finies de ω définie à la question 12, on définit une application α de $\mathbf{P}\omega \times \mathbf{P}\omega$ dans $\mathbf{P}\omega$ par

$$\alpha(u, x) = \{q \in \omega;\ (\exists p)\, e_p \subseteq x \wedge c(p, q) \in u\}$$

où c est la fonction définie à la question 11.

a) Montrez que α est continue. Déduisez-en une fonction continue Φ de $\mathbf{P}\omega$ dans $\mathbf{P}\omega \to \mathbf{P}\omega$.

Tournez la page S.V.P.

b) Montrez que la fonction Γ suivante,

$$\Gamma(f) = \{c(p,q);\ q \in f(e_p)\}$$

est l'unique fonction continue de $\mathbf{P}\omega \to \mathbf{P}\omega$ dans $\mathbf{P}\omega$ solution de $\alpha(\Gamma(f), x) = f(x)$.

c) Démontrez les relations suivantes, pour toute fonction f et tout élément u de $\mathbf{P}\omega$:

$$\Phi(\Gamma(f)) = f$$
$$\Gamma(\Phi(u)) \supseteq u$$

Quelle condition doit vérifier u pour que l'inclusion ci-dessus soit une égalité ?

Une application continue a de $\mathbf{P}\omega$ dans $\mathbf{P}\omega$ s'appelle une *fermeture* quand elle est idempotente et supérieure ou égale à l'identité : $I \subseteq a$ et $a = a \circ a$

14) Quel est l'ensemble des points fixes d'une fermeture ? Montrez que cet ensemble est stable par unions et intersections quelconques.

15) Quels sont les points isolés de l'ensemble des points fixes de la fermeture a ? Déduisez-en que les points fixes de a forment un sous-ensemble complet algébrique de $\mathbf{P}\omega$.

16) Pour tout ensemble D ordonné complet algébrique, et tout élément x de D, on pose

$$G(x) = \{n \in \omega;\ b_n \leq x\}$$

où b_n est le n-ième élément de la base de D (cf. question 7).

a) Montrez que G est une application continue de D dans $\mathbf{P}\omega$. Montrez que l'image $G(\mathrm{D})$ est fermée.

b) On pose $G_\mathrm{D} = \{u \in \mathbf{P}\omega;\ (\exists x \in \mathrm{D})\ u \subseteq G(x)\}$. Montrez que l'application suivante de G_D dans D

$$F(u) = \bigvee \{b_n;\ n \in u\}$$

est définie et continue. Démontrez les relations $F(G(x)) = x$, et $x \in G_\mathrm{D} \Rightarrow G(F(x)) \supseteq x$.

17) Réciproquement, soit D un ensemble algébrique où de plus toute partie admet une borne supérieure.

a) Que vaut G_D dans ce cas ?

b) Montrez que D est isomorphe à l'ensemble des points fixes de $G \circ F$.

QUATRIEME PARTIE

On définit un langage, nommé LAMBDA, permettant de faire de l'arithmétique donc contenant au moins la constante zéro, les fonctions successeur, prédécesseur, et le test à zéro. Voici comment on note ces fonctions de base, dans la colonne de gauche, et leur définition dans celle de droite (attention, les arguments de ces fonctions sont des ensembles d'entiers) :

$$0 = \{0\}$$
$$u + 1 = \{n + 1;\ n \in u\}$$
$$u - 1 = \{n;\ n + 1 \in u\}$$
$$\varsigma(u,v,w) = \{n \in v;\ 0 \in u\} \cup \{n \in w;\ (\exists k \in \omega)\ k + 1 \in u\}$$

Noter que travailler dans $\mathbf{P}\omega$ permet de définir la soustraction partout. Quant à ς elle pourrait être définie par cas : si u est vide, $\varsigma(u,v,w)$ aussi; si $u = \{0\}$, alors $\varsigma(u,v,w) = v$; si u est non vide et ne contient pas 0, alors $\varsigma(u,v,w) = w$; enfin, si u contient 0 et au moins un nombre positif, $\varsigma(u,v,w) = v \cup w$.

Enfin, on pose les abréviations suivantes :

$$ux = \alpha(u,x)$$
$$\lambda x \cdot t(x) = \Gamma(t)$$

où α et Γ sont définies à la question 13. La première égalité correspond à l'application de u à x, et la seconde à la définition de la fonction de paramètre x et de corps $t(x)$.

On omettra des parenthèses, en supposant que l'application est associée à gauche : $xyz = ((xy)z)$ et que la définition de fonction est associée à droite : $\lambda xy \cdot f(x,y) = (\lambda x \cdot (\lambda y \cdot f(x,y)))$

18) Quelle est l'interprétation de $\lambda x \cdot 0$?

Tournez la page S.V.P.

19) La réunion $u \cup v$ de deux parties de $\mathbf{P}\omega$ peut-elle être définie dans LAMBDA au moyen des fonctions de base ci-dessus ?

20) *a*) Montrez que, pour tout élément u de $\mathbf{P}\omega$, l'élément $Yu = (\lambda x \cdot u(xx))(\lambda x \cdot u(xx))$ est un point fixe de u.

b) On pose $d = \lambda x \cdot u(xx)$ et on suppose que a est un point fixe de u. En utilisant les codages c et e_n définis aux questions 11 et 12, montrez l'implication $e_p \subseteq d \Rightarrow e_p e_p \subseteq a$ par récurrence sur p. Qu'en déduisez-vous pour dd ?

21) Montrez que $Y = \lambda u \cdot (\lambda x \cdot u(xx))(\lambda x \cdot u(xx))$ permet d'exprimer la solution d'une définition récursive : $fx = t$ où t est une expression du langage contenant éventuellement f.

Exprimer ainsi la fonction a définie par

$$a(x, y) = \begin{cases} y, & \text{si } x = 0 \\ a(x-1, y) + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

22) On définit les fonctions suivantes :

$$[u, v] = \{2n;\ n \in u\} \cup \{2m+1;\ m \in v\}$$
$$\pi_1(u) = \{n;\ 2n \in u\}$$
$$\pi_2(u) = \{n;\ 2n+1 \in u\}$$

a) Peut-on exprimer ces fonctions dans le langage LAMBDA ?

b) Montrez qu'étant données deux fermetures a et b dans $\mathbf{P}\omega$, la fonction ci-dessous est aussi une fermeture :

$$a \otimes b = \lambda u \cdot [a(\pi_1(u)), b(\pi_2(u))]$$

23) Étant données deux fermetures a et b, on pose

$$a \rightarrow b = \lambda u \cdot (b \circ u \circ a)$$

Montrez que u est un point fixe de $a \rightarrow b$ si et seulement si (*i*) $u = \lambda x \cdot u(a(x))$ (le domaine de u est l'ensemble des points fixes de a) et (*ii*) $u(x)$ est un point fixe de b, pour tout point fixe x de a.

24) Étant donnée une fonction continue a de $\mathbf{P}\omega$ dans $\mathbf{P}\omega$, on en déduit une nouvelle fonction (qui dépend de a) :

$$V(a) = \lambda x \cdot Y(\lambda y \cdot x \cup a(y))$$

a) Montrez que $V(a)$ est une fermeture.

b) Montrez que V elle-même est une fermeture.

- FIN -

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail